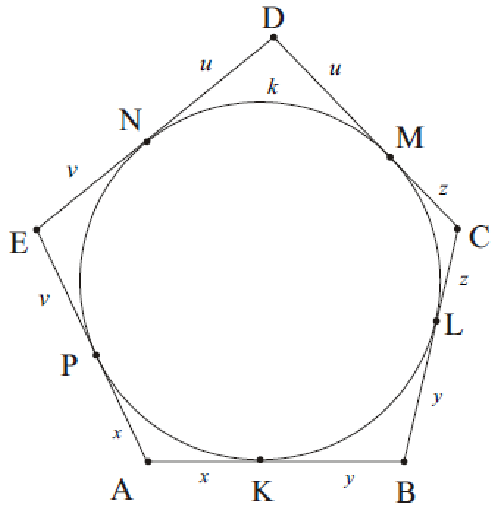
62 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 16.03.2019

Прва година

1. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што $\overline{AB}=4cm$, $\overline{BC}=6\,cm$, $\overline{CD}=8\,cm$, $\overline{DE}=7\,cm$ и $\overline{EA}=9\,cm$. Дали во овој петаголник може да се впише кружница? Одговорот да се образложи!

Решение. Нека $ABCDE$ е петаголник таков што $\overline{AB}=4cm$, $\overline{BC}=6\,cm$, $\overline{CD}=8\,cm$, $\overline{DE}=7\,cm$ и $\overline{EA}=9\,cm$, во кој може да се впише кружница k. Допирните точки на AB,BC,CD,DE,EA со k ќе ги означиме со K,L,M,N,P соодветно (види цртеж).



Тогаш,
$\overline{PA}=\overline{AK}=x$, $\overline{KB}=\overline{BL}=y$,
$\overline{LC}=\overline{CM}=z$, $\overline{MD}=\overline{DN}=u$,
$\overline{NE}=\overline{EP}=v$ и

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=6 \\ z+u=8 \\ u+v=7 \\ v+x=9 \end{cases}.$$

Ако ги собереме равенките, добиваме $2(x+y+z+u+v)=34$, од каде $x+y+z+u+v=17$. Но, тогаш $17=x+y+z+u+v=y+(x+v)+(z+u)=y+9+8=y+17$, од каде што добиваме дека $y=0$. Ако $y=0$, тогаш $K\equiv B\equiv L$, па ако A,K,B се колинеарни и B,L,C се колинеарни добиваме дека A,B и C се колинеарни. Последното е во контрадикција со претпоставката дека $ABCDE$ е петаголник. Значи, во петаголникот не може да се впише кружница.

2. Во автобусите на една туристичка агенција, треба да се распоредат членовите на една туристичка група, така што во секој автобус да има ист број на туристи. На почетокот во секој автобус влегле по 22 туристи при што останал несместен еден турист. Но, еден автобус заминал празен, па во останатите автобуси туристите се распоределе рамномерно. Колку туристи и колку автобуси биле на почетокот, ако во секој автобус влегле не повеќе од 32 туристи?

Решение. Нека k е бројот на автобуси кои што туристичката агенција ги пратила на почетокот. Од условот на задачата следува дека $k\geq 2$, а бројот на туристи е $22k+1$. Откако заминал еден автобус, туристите можеле да се сместат во $k-1$ автобус подеднакво.

Значи, бројот $22k+1$ е делив со $k-1$. Задачата се сведува на тоа да се определат броевите k и n така што $k \geq 2$ и $n=\dfrac{22k+1}{k-1}$ е цел број, таков што $n \leq 32$.

Бројот $n=22+\dfrac{23}{k-1}$ е цел број ако и само ако $\dfrac{23}{k-1}$ е цел број. Но, тоа е можно само за $k=2$ и $k=24$. Ако $k=2$, тогаш $n=45$ што не е можно, бидејќи $n \leq 32$. Ако $k=24$, тогаш $n=23$. Значи, на почетокот имало 24 автобуси, а бројот на туристи бил $n(k-1)=23 \cdot 23=529$.

3. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули, се добива број кој е точен куб. Докажи!

Решение. Ако меѓу секои две цифри на бројот 1331 допишеме по 2019 нули се добива бројот

$$1\underbrace{00...0}_{2019}3\underbrace{00...0}_{2019}3\underbrace{00...0}_{2019}1\,.$$

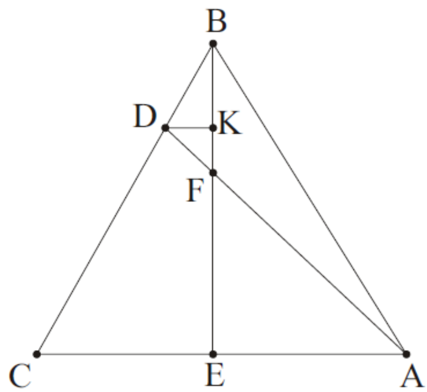
За овој број имаме

$$1\underbrace{00...0}_{2019}3\underbrace{00...0}_{2019}3\underbrace{00...0}_{2019}1=10^{3\cdot 2019+3}+3\cdot 10^{2\cdot 2019+2}+3\cdot 10^{2019+1}+1$$

$$=(10^{2019+1})^3+3\cdot(10^{2019+1})^2\cdot 1+3\cdot 10^{2019+1}\cdot 1^2+1^3=(10^{2019+1}+1)^3\,.$$

4. На страната BC од рамнокракиот триаголник ABC $(\overline{AB}=\overline{BC})$ е избрана точка D таква што $\overline{BD}:\overline{DC}=1:4$. Во кој однос правата AD ја дели висината BE сметајќи од темето B?

Решение. Пресекот на BE и AD да го означиме со F. Нека $K \in BE$ е таква што $DK \,||\, CA$. Според тоа, $\triangle BCE \sim \triangle BDK$ и $\dfrac{\overline{BK}}{\overline{BE}}=\dfrac{\overline{KD}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{5}$, односно $\overline{BK}=\dfrac{1}{5}\overline{BE}$ и $\overline{KD}=\dfrac{1}{5}\overline{CE}$.



Бидејќи триаголниците DKF и AEF имаат еднакви агли, тие се слични, па според тоа $\dfrac{\overline{KD}}{\overline{AE}}=\dfrac{\overline{KF}}{\overline{FE}}=\dfrac{1}{5}$. Ако воведеме ознака $\overline{KF}=x$, тогаш $\overline{FE}=5x$, па од равенството $\overline{BK}+\overline{KF}+\overline{FE}=\overline{BE}$, добиваме $\overline{BK}=\dfrac{3}{2}x$. Бидејќи $\overline{BF}=\overline{BK}+\overline{KF}=\dfrac{3}{2}x+x=\dfrac{5}{2}x$, од равенството $\overline{FE}=5x$ добиваме $\overline{BF}:\overline{FE}=\frac{5}{2}x:5x=1:2$.

Втора година

1.Докажи дека $\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{3}$.

Решение. Левата страна на равенството кое треба да го докажеме е еднаква на

$$\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{4}-1)}=$$
$$=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt[3]{2}\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}=\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}\ (\sqrt[3]{2}+1).$$

Според тоа,

$$(\sqrt{\sqrt[3]{4}-1}+\sqrt{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}})^2=(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{2}+1)^2=(\sqrt[3]{4}-1)(\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2}+1)$$
$$=\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1=2\cdot 2-1=3.$$

Со коренување на последното равенство, го добиваме бараното равенство.

2.Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката $\sqrt{ax^2+ax+2}=ax+2$ има решение.

Решение. Јасно ако $ax+2<0$, тогаш равенка нема решение, а ако $ax+2\geq 0$, тогаш таа е еквивалентна со равенката $(a^2-a)x^2+3ax+2=0$.

Да забележиме дека ако $a^2-a=0$, ги имаме следниве две ситуации:
За $a=0$, добиваме $2=0$, што е контрадикција.

За $a=1$ добиваме $x=-\frac{2}{3}$. Бидејќи $ax+2=-\frac{2}{3}+2\geq 0$, $a=1$ е решение на задачата.

Нека сега $a\neq 0,1$. Тогаш решенијата на квадратната равенка се

$$x_{1,2}=\frac{-3a\pm\sqrt{a(a+8)}}{2a(a-1)}.$$

Решенијата се реални ако $a(a+8)\geq 0$, од каде имаме дека мора $a\leq -8$ и $a>0$.

Со едноставна проверка барем за едно од решенијата x_1 и x_2, $ax_{1,2}+2\geq 0$, за $a\leq -8$ и $ax_{1,2}+2\geq 0$, за $a>0$. Значи, почетната равенка има решение за $a\leq -8$ и $a>0$.

3. На произволен начин од множеството $\{1,2,\dots,25\}$ се избрани 17 различни броеви. Докажи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е точен квадрат.

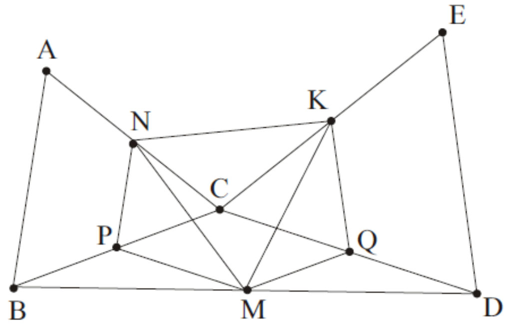
Решение. Да ги разгледаме множествата

$$\{1,4,9,16,25\},\{2,8,18\},\{3,12\},\{5,20\},\{6,24\},\{7\},\{10\},\{11\},$$
$$\{13\},\{14\},\{15\},\{17\},\{19\},\{21\},\{22\},\{23\}.$$

Тие се дисјунктни и нивната унија е множеството $\{1,2,\dots,25\}$. Бидејќи се избрани 17 различни броеви, а множества се 16, според принципот на Дирихле, постојат барем два броја кои се елементи на исто множество. Тоа значи дека меѓу избраните броеви постојат два различни броја чиј производ е полн квадрат.

4. Дадени се два рамнострани триаголници ABC и CDE кои се наоѓаат од иста страна на правата AE и имаат само една заедничка точка, точката C. Притоа точките A, C и D не се колинеарни исто така и точките B, C и E не се колинеарни. Нека M е средина на BD, N е средина на AC и нека K е средина на CE. Докажи дека $\triangle MNK$ е рамностран.

Решение. Нека P и Q се средини на BC и CD соодветно.



Бидејќи P и N се средини на BC и AC, соодветно, следува

$$\overline{PN} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{PC}. \qquad (1)$$

Бидејќи M и Q се средини на BD и CD следува

$$\overline{MQ} = \frac{\overline{BC}}{2} = \overline{PC}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува $\overline{PN} = \overline{MQ}$. Аналогно се докажува дека $\overline{PM} = \overline{QK}$. Имаме

$$\measuredangle MPN = \measuredangle MPC + \measuredangle CPN = \measuredangle MQC + 60^\circ = \measuredangle MQC + \measuredangle CQK = \measuredangle KQM.$$

Следува дека $\triangle MPN \cong \triangle KQM$. Значи $\overline{MN} = \overline{MK}$. Нека $\measuredangle BCD = \alpha$. Тогаш

$$\measuredangle NMK = \measuredangle PMQ - \measuredangle PMN - \measuredangle QMK = \alpha - 180^\circ + \measuredangle NPM$$
$$= \alpha - 180^\circ + \measuredangle NPC + \measuredangle CPM = \alpha - 180^\circ + 60^\circ + (180^\circ - \alpha) = 60^\circ.$$

Следува $\triangle MNK$ е рамностран.

Трета година

1. Реши ја неравенката $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos \pi x} \leq 8$.

Решение. Ако означиме $4^{\sin^2 \pi x} = y$, тогаш $4^{\cos^2 \pi x} = 4^{1-\sin^2 \pi x} = \dfrac{4}{4^{\sin^2 \pi x}} = \dfrac{4}{y}$, па

неравенката го добива обликот $y + 3 \cdot \dfrac{4}{y} \leq 8,\ y > 0$. Оттука следува дека

$y^2 - 8y + 12 \leq 0$, $y > 0$, од каде што добиваме

$$2 \leq y \leq 6 \text{, т.е } 2 \leq 4^{\sin^2 \pi x} \leq 6. \qquad (1)$$

Бидејќи $0 \leq \sin^2 \pi x \leq 1$, следува дека

$$1 \le 4^{\sin^2 \pi x} \le 4\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2 \le 4^{\sin^2 \pi x} \le 4$, од каде што следува дека $\frac{1}{2} \le \sin^2 \pi x \le 1$, т.е $\frac{\sqrt{2}}{2} \le |\sin \pi x| \le 1$. Последната равенка е еквивалентна со неравенките $\sin \pi x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\sin \pi x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$, од каде $\frac{4k+1}{4} \le x \le \frac{4k+3}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Реши ја равенката

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}\,.$$

Решение. Ќе воведеме смена $x = t^{12}$, $t \ge 0$, при што $\sqrt[12]{x} = t$, $\sqrt[4]{x} = t^3$ и $\sqrt[6]{x} = t^2$.

Почетната равенка може да се запише како $2^t + 2^{t^3} = 2 \cdot 2^{t^2}$. Бидејќи 2^t и 2^{t^3}, t и t^3 се ненегативни реални броеви, од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме

$$2^t + 2^{t^3} \ge 2\sqrt{2^t \cdot 2^{t^3}} = 2 \cdot 2^{\frac{t+t^3}{2}} \ge 2 \cdot 2^{t^2}\,.$$

Равенство е исполнето ако и само ако $2^t = 2^{t^3}$ и $t = t^3$.

Во двата случаи добиваме дека решенија се $t_1 = 0,\ t_2 = 1,\ t_3 = -1$. Јасно е дека t_3 не може да биде решение.

Сега, решенија на почетната равенка се $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

3. Во триаголникот ABC, исполнето е равенството $c^2 = 4ab\cos\alpha\cos\beta$. Да се докаже дека триаголникот е рамнокрак.

Решение. Според косинусната теорема за триаголникот ABC исполнето е равенството

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$

Бидејќи $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, т.е. $\cos\gamma = \cos(180^\circ - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha+\beta)$, заменувајќи во последното равенство добиваме:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha+\beta) = a^2 + b^2 + 2ab(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\,.$$

Од условот на задачата имаме $c^2 = 4ab\cos\alpha\cos\beta$, па заменувајќи во последното равенство добиваме

$$a^2 + b^2 = 2ab(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2ab\cos(\alpha-\beta)\,,$$

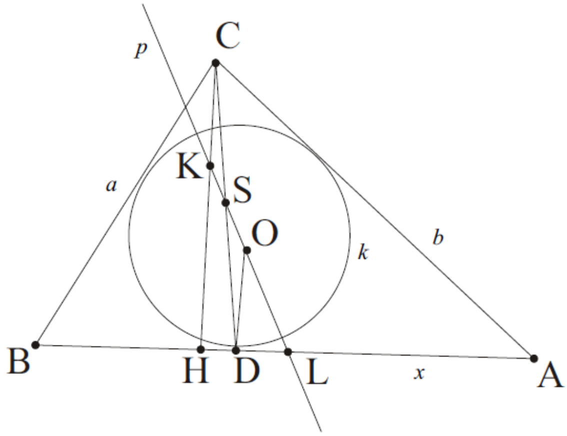
односно

$$(a-b)^2 = 2ab(\cos(\alpha-\beta) - 1)\,.$$

Бидејќи левата страната е ненегативна, а десната страна е непозитивна, равенството е исполнето ако и само ако $\cos(\alpha-\beta) - 1 = 0$, т.е. $\alpha = \beta$, т.е. $a = b$, односно триаголникот ABC е рамнокрак.

4. Во триаголникот ABC е впишана кружница со центар во точката O, која страната AB ја допира во точката D. Нека S е средина на отсечката CD. Докажи дека правата OS ја преполовува страната AB.

Решение. Нека CH е висина на $\triangle ABC$ и правата $OS \equiv p$ ги сече страната AB и висината CH во точките L и K, соодветно.



Треба да докажеме дека $\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Од условот на задачата следува дека $\triangle SOD \cong \triangle SKC$ (признак ASA). Оттука следува дека $\overline{CK} = r,\ \overline{KH} = h - r$, каде што со r е означен радиусот на кружницата, а со h должината на висината CH. Од сличноста на триаголниците LHK и LDO следува

$$\overline{LH} : \overline{LD} = \overline{HK} : \overline{DO} \qquad (1)$$

Означуваме $x = \overline{AL}, b_1 = \overline{AH}$. Тогаш од $\overline{AD} = s - a$ (s е полупериметарот на $\triangle ABC$)

имаме: $\overline{HL} = b_1 - x, \overline{LD} = s - a - x$, па (1) добива облик

$$\frac{b_1 - x}{s - a - x} = \frac{h - r}{r} = \frac{h}{r} - 1\,. \qquad (2)$$

За односот $\frac{h}{r}$, од познатите формули за плоштина на триаголник: $P = \frac{hc}{2}$ и $P = r \cdot s$ добиваме:

$$\frac{h}{r} = \frac{\frac{2P}{c}}{\frac{P}{s}} = \frac{2s}{c}\,. \qquad (3)$$

Ако (3) го замениме во (2) добиваме $\frac{b_1 - x}{s - a - x} = \frac{2s}{c} - 1 = \frac{2s - c}{c} = \frac{a + b}{c}$, од каде што

$$(b_1 - x)c = (a + b)(s - a - x)$$

$$b_1 c - cx = (a + b)(s - a) - (a + b)x$$

$$(a + b - c)x = (a + b)(s - a) - b_1 c\,.$$

Од косинусната теорема за $\triangle ABC$ и правоаголниот $\triangle AHC$ следува $\frac{b_1}{b} = \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, т.е $b_1 c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$. Тогаш, од

$$(a+b-c)x=(a+b)\frac{b+c-a}{2}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=$$
$$=\frac{1}{2}(ab+ac-a^2+b^2+bc-ab-b^2-c^2+a^2)$$
$$=\frac{c}{2}(a+b-c)\,.$$

Следува дека $x=\frac{c}{2}$.

Четврта година

1. За четири броја a,b,c,d е исполнето: $d>c, a+b=c+d, a+d<b+c$. Подреди ги по големина овие четири броеви.

Решение. Од $a+d<b+c$, следува $a+d+b<2b+c$. Бидејќи $a+b=c+d$, следува $c+2d<2b+c$, односно $d<b$.
Слично, од $a+d<b+c$, следува $a+d+c<b+2c$. Бидејќи $a+b=c+d$, следува $2a+b<b+2c$, односно $a<c$.
Конечно, од условот имаме $c<d$ и како $d<b$ и $a<c$, добиваме $a<c<d<b$.

2. Докажи дека за секој природен број $n>1$ е точно неравенството

$$2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!>((n+1)!)^n\,.$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n=2$, имаме $48=2!\cdot 4!>(3!)^2=36$, т.е неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството важи за природниот број n. Тогаш

$$\begin{aligned}&2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)!\cdot(2(n+1))!>((n+1)!)^n\cdot(2n+2)!\\&=((n+1)!)^n\cdot(n+1)!\cdot(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n+2)>\\&>((n+1)!)^{n+1}(n+2)^{n+1}=((n+2)!)^{n+1}\end{aligned},$$

па од принципот на математичка индукција следува дека неравентството важи за секој природен број n.

3.Нека (a_n) е низа од реални броеви така да $|a_{n+1}-a_n|\leq 1$, за сите $n\in N$ и нека (b_n) е низа дефинирана со $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$. Докажи дека $|b_{n+1}-b_n|\leq\frac{1}{2}$, за сите $n\in N$.

Решение. Бидејќи $|a_{n+1}-a_n|\leq 1$, од неравенство на триаголник имаме дека $|a_m-a_n|\leq|m-n|$, за сите $m,n\in N$. Тогаш,

$$|b_{n+1}-b_n|=\left|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_n}{n}\right|=$$
$$=\frac{|na_{n+1}-a_1-\ldots-a_n|}{n(n+1)}=\frac{|a_{n+1}-a_1+a_{n+1}-a_2+\ldots+a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)}\leq$$

$$\le \frac{|a_{n+1}-a_1|+|a_{n+1}-a_2|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)} \le$$

$$\le \frac{n+(n-1)+\ldots+1}{n(n+1)} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+1)} = \frac{1}{2}.$$

4. Нека $a_1 = \frac{2}{3}$ и $a_{n+1} = \frac{a_n}{4} + \sqrt{\frac{24a_n+9}{256}} - \frac{9}{48}$ за сите природни броеви n.

Најди ја вредноста на $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Решение. Нека $b_n = \sqrt{24a_n + 9}$. Тогаш имаме $a_n = \frac{b_n^{\,2} - 9}{24}$, па почетната рекурентна релација го добива обликот $\frac{b_{n+1}^{\,2} - 9}{24} = \frac{b_n^{\,2} - 9}{96} + \frac{b_n}{16} - \frac{9}{48}$ или $(2b_{n+1})^2 = (b_n + 3)^2$.

Бидејќи b_n се ненегативни за сите $n \in \mathbb{N}$, следува дека $2b_{n+1} = b_n + 3$. Презапишувајќи го последното равенство како $2(b_{n+1} - 3) = b_n - 3$. Нека ставиме $c_n = b_n - 3$. Тогаш, имаме $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$ и $c_1 = b_1 - 3 = \sqrt{24a_1 + 9} - 3 = 2$.

Значи, имаме $c_n = \frac{1}{2^{n-2}}$, па $b_n = \frac{1}{2^{n-2}} + 3$ и $a_n = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2^{2n-4}} + \frac{1}{2^n}$.

Конечно,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{1}{24}\left(4 + 1 + \frac{1}{4} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{11}{9}$$

РЕЗУЛТАТИ ОД 62 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА

Прва година

I награда: Кристина Тасева, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје**;** Блаже Суклевски, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје**;** Бојан Димовски, ССОУ „Коле Неделковски”, Велес**;** Јасна Илиева, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје**;** Јосиф Тренчовски, СУГС „Раде Јовчевски Корчагин”; Скопје**,** Сташа Петровиќ, СУГС „Орце Николов”; Скопје**,** Благојче Павлески, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје**;** Димитар Џорлев, СОУ „Јане Сандански”, Струмица

II награда: Теодора Санева, СОУ „Љупчо Сантов”, Кочани**;** Марко Таневски, МУ „Нова”, Скопје**;** Дамјан Филиповски, Американска

Гимназија; Скопје, Ива Јоргушеска, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Андреј Бојчевски, СОУ „Јосип Броз-Тито”, Битола
III награда: Димитар Трајков, СОУ „Јане Сандански”, Струмица; Ева Велковска, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Раде Перовановиќ, СОУ „Јане Сандански”, Струмица; Христина Здравеска, ПСУ „Јахја Кемал”, Тетово; Петар Мишов, ПСУ „Јахја Кемал”, Струга; Надја Настеска, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Merita Aliu, SHMK Gostivar, Gostivar

Втора година

I награда: Ангела Тошеска, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Лука Грашкоски, СУ „Нова”, Скопје; Владимир Шаркоски, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје
II награда: Христина Митреска, ПСУ„Јахја Кемал”, Струга; Филип Филипоски, СОУ „Орце Николов”, Скопје; Спасе Спасов, ПСУ „Јахја Кемал”, Струмица; Дрин Кадриу, ПСУ „Јахја Кемал”, Струга
III награда: Сара Манасиева, СОУ „Љупчо Сантов”, Кочани; Филип Милисов, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Бисера Галеска, СОУ „Мирче Ацев”, Прилеп; Цветанка Пасинечка, СОУ „Добри Даскалов”, Кавадарци; Андреј Тасевски, СОУ „Орце Николов”, Скопје

Трета година

I награда: Иљир Лимани, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Анастасија Тортевска, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Михаела Хаџиска, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје
II награда: Ангела Бушеска, ПСУ „Јахја Кемал”, Струга; Благој Младенов, ПСУ „Јахја Кемал, Скопје; Алек Јармов, СОУ „Раде Јовчевски Корчагин”, Скопје; Ангела Трпческа, ПСУ „Јахја Кемал”, Струга
III награда: Емилија Џајковска, СОУ „Мирче Ацев”, Прилеп; Милан Велиновски, СОУ „Гоце Делчев”, Куманово

Четврта година

I награда: Стефан Стојановски, СУГС „Георги Димитров”, Скопје; Јована Илиева, СОУ „Славчо Стојменски”, Штип; Мартин Динев, СОУ „Никола Карев”, Струмица; Горазд Димитров, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје
II награда: Теодора Пецаковска, ПСУ „Јахја Кемал”, Струга; Ќендреса Селими, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Димитар Звонимир Митев, СОУ „Јане Сандански”, Струмица
III награда: Гораст Данчевски, ПСУ „Јахја Кемал”, Скопје; Стефанија Велевска, СОУ „Перо Наков”, Куманово; Христијан Славкоски, СОУ „Мирко Милески”, Кичево; Марко Ристески, СОУ „Мирче Ацев”, Прилеп; Маринела Фармакоска, СОУ „Д-р Ибрахим Темо”, Струга