РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019 16.02.2019

Прва година

1АБ. (Сигма 112, зад. 361, стр. 41) Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $a^2=b(a+1)$. Од $\text{НЗД}(a,a+1)=1$ и $(a+1)\mid a^2$ следува $a+1=1$ или $a+1=-1$. Во првиот случај $a=0$ и $b=0$, а во вториот случај $a=-2$ и $b=-4$.

2А. Одреди ги сите трицифрени броеви со различни цифри кои се деливи со секој двоцифрен број кој се добива со изоставување на една негова цифра без да се менува редоследот на останатите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш $a\neq 0$, $a\neq b\neq c\neq a$ и $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}, \frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}, \frac{\overline{abc}}{\overline{bc}}$ се цели броеви.

Бидејќи $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}=\frac{\overline{ab0}+c}{\overline{ab}}=10+\frac{c}{\overline{ab}}$, бројот $\frac{c}{\overline{ab}}$ е цел само ако $c=0$.

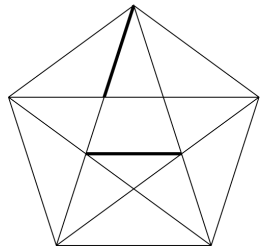
Бидејќи $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}}=\frac{\overline{ab}}{a}=10+\frac{b}{a}$, следува дека a е делител на b. Според тоа, $a\in\{1,2,3,4\}$.

Од $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}}=\frac{\overline{ab}}{b}=\frac{10a}{b}+1$ следува дека b е делител на $10a$.

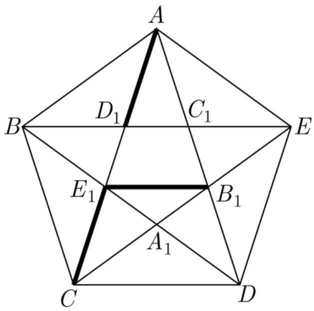
Ги разгледуваме поединечните случаи за последните два услова:

- за $a=1$, од првиот услов $b\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Вториот услов е исполнет само за $b=2$ и $b=5$. Се добиваат решенијата 120 и 150.
- за $a=2$, од првиот услов $b\in\{4,6,8\}$. Вториот услов е исполнет само за $b=4$. Се добива решението 240.
- за $a=3$, од првиот услов $b\in\{6,9\}$. Вториот услов е исполнет само за $b=6$. Се добива решението 360.
- за $a=4$, од првиот услов $b=8$. Вториот услов во овој случај е исполнет и се добива решението 480.

Од претходната дискусија добиваме дека броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се: 120, 150, 240, 360, 480.



3А. 4Б. (Сигма 111, зад. 351, стр. 44). На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.



Решение. Бидејќи $\overline{CE_1} = \overline{AD_1}$, доволно е да докажеме дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак. Бидејќи дијагоналата на правилен петаголник е паралелна на неговата страна, важи $B_1E_1 \,||\, C_1D_1$, односно $E_1B_1 \,||\, D_1E$. Според тоа, $\angle CB_1E_1 = \angle CED_1$, како агли со паралелни краци. Заради симетријата на петаголникот, триаголникот CED_1 е рамнокрак, па затоа $\angle CED_1 = \angle ECD_1$. Конечно, $\angle CB_1E_1 = \angle B_1CE_1$, што значи дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак.

4А. Нека a, b, c се непарни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $ab-1$, $bc-1$, $ac-1$ е делив со 4.

Решение. Секој природен број има еден од облиците $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$. Бидејќи броевите a, b, c се непарни природни броеви, тие имаат еден од облиците $4k+1$, $4k+3$. Според принципот на Дирихле, два од броевите a, b, c имаат ист облик. Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека a и b имаат ист облик. Според тоа, $a = 4k_1+1$, $b = 4k_2+1$ или $a = 4k_1+3$, $b = 4k_2+3$.

Во случајот $a = 4k_1+1$, $b = 4k_2+1$ имаме

$$ab-1 = (4k_1+1)(4k_2+1)-1 = 16k_1k_2+4k_1+4k_2+1-1 = 4(4k_1k_2+k_1+k_2).$$

Во случајот $a = 4k_1+3$, $b = 4k_2+3$ имаме

$$ab-1 = (4k_1+3)(4k_2+3)-1 = 16k_1k_2+12k_1+12k_2+9-1 =$$
$$= 4(4k_1k_2+3k_1+3k_2+2).$$

Според тоа, во секој случај $4 \mid (ab-1)$, односно барем еден од броевите $ab-1$, $bc-1$, $ac-1$ е делив со 4.

2Б. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества имале заедно 913, 973, 873, 1011 и 1002 страни. По колку страни имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страните на книгите се a, b, c, d, e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a+b+c+d=913 \\ a+b+c+e=973 \\ a+b+d+e=873 \\ a+c+d+e=1011 \\ b+c+d+e=1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки, се добива

$$4(a+b+c+d+e)=4772 \Rightarrow a+b+c+d+e=1198.$$

Ако од оваа равенка се одземе секоја од петте равенки од системот, ќе се добие $a=182$, $b=191$, $c=320$, $d=220$, $e=280$ страни.

3Б. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=6$, пресметај ја вредноста на изразот

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Решение. Од тоа што $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2\left(ab+bc+ca\right)$ и од условот на задачата, имаме дека

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left(\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)\right)=\frac{1}{2}\left(0-6\right)=-3.$$

Ако ја искористиме уште еднаш формулата за трином на квадрат имаме

$$\left(ab+bc+ca\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\left(a+b+c\right),$$

т.е. $\left(-3\right)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc\cdot 0.$

Оттука, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9.$

Втора година

1А. Дадени се две квадратни равенки $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$. Одреди ги сите вредности на параметарот a за кои двете равенки имаат барем едно заедничко решение.

Решение. Со одземање на втората равенка од првата добиваме $\left(a-1\right)x+1-a=0 \Leftrightarrow \left(a-1\right)\left(x-1\right)=0.$ Ако $a=1$, тогаш станува збор за иста равенка, па имаат барем едно заедничко решение.

Ако $a\neq 1$, тогаш мора $x=1$, па со замена во равенките добиваме дека $a=-2$. Следува равенките имаат барем едно заедничко решение само кога $a=1$ и $a=-2$.

2АБ. (Сигма 111, зад. 352, стр. 45). Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2-2ab+b^2=a \\ 4a^2-5ab+2b^2=b \end{cases}.$$

Решение. Ако првата равенка ја помножиме со b, а втората со a, тогаш го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2b-2ab^2+b^3=ab \\ 4a^3-5a^2b+2ab^2=ab \end{cases}.$$

Ако во последниот систем ги одземеме равенките, се добива

$b^3-4ab^2+7a^2b-4a^3=0$. ....(*)

Ако $a=0$, тогаш равенката (*) добива облик $b^3=0$, т.е. $b=0$, па затоа $(a,b)=(0,0)$ е едно решение на системот.

За $a\neq 0$, равенката (*) се дели со a. Ја воведуваме замената $z=\dfrac{b}{a}$ и равенката (*) го добива еквивалентниот облик

$z^3-4z^2+7z-4=0$

која е еквивалентна со равенката $(z-1)(z^2-3z+4)=0$.

За $z=1$ важи $a=b$, а потоа со замена во почетниот систем лесно се добива дека $\begin{cases} 2a^2-2a^2+a^2=a \\ 4a^2-5a^2+2a^2=a \end{cases} \Leftrightarrow a^2=a.$ Значи, $(a,b)=(1,1)$.

Понатаму, дискриминантата на равенката $z^2-3z+4=0$ е еднаква на -7, па затоа таа нема реални решенија, што значи дека почетниот систем нема други реални решенија.

3А. Нека е даден конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AD\perp BC$. Нека растојанието од средината на AB до средината на CD е 1cm. Пресметај го растојанието од средината на AC до средината на BD.

Решение. Нека $M,\ N,\ P,\ Q$ се средини на отсечките $AB,\ CD,\ AC,\ BD$ соодветно. Тогаш $\overline{MN}=1\text{cm}$. Од тоа што M и P се средини на AB и AC соодветно, следува и $\overline{MP}=\dfrac{\overline{BC}}{2}$. Од тоа што N и Q се средини на CD и BD соодветно имаме $NQ\,||\,BC$ и $\overline{NQ}=\dfrac{\overline{BC}}{2}$. Значи, $\overline{PM}=\overline{NQ}$. Од друга страна, $PM\,||\,BC$ и $NQ\,||\,BC$ следува $PM\,||\,NQ$.

Аналогно се покажува дека $\overline{PN}=\overline{MQ}$ и $PN\,||\,MQ$. Следува дека во четириаголникот $MQNP$ спротивните страни се паралелни и еднакви па тој е паралелограм.

Од $AD\perp BC$, $NQ\,||\,BC$ и $PN\,||\,MQ$ следува $\angle PNQ=90^\circ$. Значи, четириаголникот $MQNP$ е правоаголник со дијагонали MN и PQ. Следува дека тие се еднакви, т.е. $\overline{PQ}=\overline{MN}=1cm.$

4АБ. (Сигма 112, зад. 364, стр. 42). Во зависност од вредноста на реалниот параметар, во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\left(a-1\right)\left(1+x+x^2\right)^2=\left(a+1\right)\left(1+x^2+x^4\right).$$

Решение. Имаме

$$1+x^2+x^4=\left(1+x+x^2\right)^2-\left(2x+2x^2+2x^3\right)=\left(1+x+x^2\right)^2-2x\left(1+x+x^2\right)$$

$=\left(1+x+x^2\right)\left(\left(1+x+x^2\right)-2x\right)$ па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\left(a-1\right)\left(1+x+x^2\right)^2=\left(a+1\right)\left(1+x+x^2\right)\left(\left(1+x+x^2\right)-2x\right)$$

$$\left(a-1\right)\left(1+x+x^2\right)^2-\left(a+1\right)\left(1+x+x^2\right)\left(\left(1+x+x^2\right)-2x\right)=0$$

$$\left(1+x+x^2\right)\left(\left(a-1\right)\left(1+x+x^2\right)-\left(a+1\right)\left(1+x+x^2\right)+\left(a+1\right)2x\right)=0$$

Дискриминантата на равенката $1+x+x^2=0$ е $D=1-4\cdot1\cdot1=-3<0$ па таа нема реални решенија. Останува случајот кога вториот множител е нула.

$$\left(\left(a-1\right)-\left(a+1\right)\right)\left(1+x+x^2\right)+\left(a+1\right)2x=0$$

$$-2\left(1+x+x^2\right)+2\left(a+1\right)x=0$$

$$1+x+x^2-\left(a+1\right)x=0$$

$$x^2-ax+1=0$$

Дискриминатата на последната равенка е $D=a^2-4$, па затоа оваа равенка има реални решенија ако и само ако $\left|a\right|\geq2$. Конечно,

- за $a\in\left(-2,2\right)$, дадената равенка нема реални решенија,
- за $a=2$ равенката има едно решение $x=1$,
- за $a=-2$ равенката има едно решение $x=-1$ и
- за $a<-2$ или $a>2$ равенката има реални и различни решенија $x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$.

1Б. Во квадратната равенка $x^2-\left(m+1\right)x+3m+2=0$ да се определи параметарот m така што збирот од решенијата на дадената равенка да е еднаков на збирот од нивните квадрати.

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=m+1$ и $x_1x_2=3m+2$. Од условот на задачата имаме

$m+1=x_1+x_2=x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=\left(x_1+x_2\right)^2-x_1x_2=\left(m+1\right)^2-2\left(3m+2\right)$, т.е.

$m+1=\left(m+1\right)^2-2\left(3m+2\right)$, или $m^2-5m-4=0$. Со решавање на квадратната равенка добиваме $m_1=\dfrac{5-\sqrt{31}}{2}$ и $m_2=\dfrac{5+\sqrt{31}}{2}$.

3Б. Даден е $\triangle ABC$ со страна $\overline{AB}=2cm$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$. Да се пресметаат должините на страните BC и AC.

Решение. Нека пресечната точка на висината h_c и страната AB е точка D. Од $\beta=45^\circ$ и $h_c\perp AB$ следува $\angle BCD=45^\circ$, т.е. $\triangle BCD$ е рамнокрак правоаголен триаголник и $\overline{BD}=h_c$. Тогаш од $\sin 45^\circ=\dfrac{h_c}{a}$, следува $a=\sqrt{2}h_c$. Од $\sin 30^\circ=\dfrac{h_c}{b}$, следува $b=2h_c$. Од $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ следува $\left(2h_c\right)^2-\left(2-h_c\right)^2=h_c^{\,2}$ и $\left(\sqrt{2}h_c\right)^2-h_c^{\,2}=h_c^{\,2}$. Со изедначување на левите страни на последните равенства имаме $\left(2h_c\right)^2-\left(2-h_c\right)^2=\left(\sqrt{2}h_c\right)^2-h_c^{\,2}$, т.е. $2h_c^{\,2}+4h_c-4=0$. Со решавање на квадратната равенка, добиваме дека $h_c=\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{cm}$. Следува $a=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{cm}$, а $b=2\left(\sqrt{3}-1\right)\mathrm{cm}$.

Трета година

1А. Во множеството реални броеви реши ја равенката $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1$.

Решение. За $x>0$, равенката ја трансформираме во облик

$\log_4 x\left(\dfrac{\log_2 x}{\log_4 x}+\dfrac{\log_3 x}{\log_4 x}+1\right)=1$. Од својствата за логаритми имаме

$$\log_4 x\left(\frac{\log_x 4}{\log_x 2}+\frac{\log_x 4}{\log_x 3}+1\right)=1 \text{ или } \log_4 x\left(\log_2 4+\log_3 4+1\right)=1.$$

Сега $\log_4 x=\dfrac{1}{3+2\log_3 2}$, па $x=4^{\frac{1}{3+2\log_3 2}}=2^{\frac{2}{3+2\log_3 2}}$.

2АБ. (Сигма 112, зад. 367, стр. 43) Даден е триаголник ABC и точка D на страната BC. Нека $\alpha_1=\measuredangle DAB$ и $\alpha_2=\measuredangle CAD$. Докажи дека

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\overline{AD}}=\frac{\sin\alpha_1}{\overline{AC}}+\frac{\sin\alpha_2}{\overline{AB}}.$$

Решение. За плоштината на триаголникот *ABC* важи $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ABD}+P_{\Delta ADC}$. Последново се запишува во облик

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\alpha_1+\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha_2.$$

Делејќи со $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$ го добиваме бараното равенство.

3А. Пресметај го остриот агол α без употреба на калкулатор, ако

$$ctg\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

Решение. Условот се трансформира на следниот начин:

$$ctg\alpha=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+\sqrt{3}\left(\sqrt{2}+1\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\sin 60^0+\sin 45^0}{\sin 45^0-\sin 30^0}=\frac{2\sin\frac{105^0}{2}\cos\frac{15^0}{2}}{2\sin\frac{15^0}{2}\cos\frac{75^0}{2}}=\frac{\cos(90^0-\frac{105^0}{2})\cos\frac{15^0}{2}}{\sin\frac{15^0}{2}\cos\frac{75^0}{2}}=ctg\frac{15^0}{2}.$$

Оттука $\alpha=\frac{15^0}{2}$.

4АБ. (Сигма 110, зад. 1451, стр. 32) Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}(1+4x^2)y=4z^2\\(1+4y^2)z=4x^2\\(1+4z^2)x=4y^2\end{cases}.$$

Решение. Ако некој од броевите $n=1$ е еднаков на нула, тогаш $x=y=z=0$. Доколку сите се различни од нула, јасно мора сите да се позитивни. Множејќи ги равенките и од $xyz\neq 0$ добиваме еквивалентна равенка $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64xyz$. Користејќи неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина за $a>0$, $1+4a^2\geq 2\sqrt{4a^2}=4a$, добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)\geq 4x\cdot 4y\cdot 4z=64xyz.$$

Треба да важи знакот за равенство, а тоа се достигнува само кога $1+4x^2=1+4y^2=1+4z^2$, односно кога $x=y=z$. Тогаш погоре добиената равенка добива облик

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2.,$$

од каде $1+4x^2=4x$ или $x=\frac{1}{2}$. Решението на системот е $x=y=z=\frac{1}{2}$.

1Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\frac{5}{2}.$$

Решение. Да забележиме дека квадратните триноми $x^2+2x+4>0,\ x^2-2x+3>0$ за секој реален број x. Тогаш дефиниционата област на равенката е $D=\mathbb{R}$. Двата собироци се реципрочни, па воведуваме смена $t=\sqrt{\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}$ и равенката се трансформира во равенка $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0$ чии решенија се $t_1=2, t_2=\frac{1}{2}$.

Равенката

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}=4\Leftrightarrow x^2-2x+3=4(x^2+2x+4)\Leftrightarrow 3x^2+10x+13=0$$

има негативна дискриминанта, односно нема реални решенија.

Равенката пак има решенија $x_1=2, x_2=\frac{4}{3}$. Последниве се решенија и на почетната равенка.

3Б. Докажи го равенството

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2.$$

Решение. Користиме дека $\log_x 2^a=a\log_x 2$ и важи $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k-1}.$

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=$$
$$=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2^2}+\frac{1}{\log_x 2^2\cdot\log_x 2^3}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=$$
$$=\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$
$$=\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2.$$

Четврта година

1А. Нека $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ се низи зададени со

$$x_0=0,\ y_0=1,\ x_{n+1}=\frac{3x_n+y_n}{4},\ y_{n+1}=\frac{2x_n+3y_n}{5}.$$

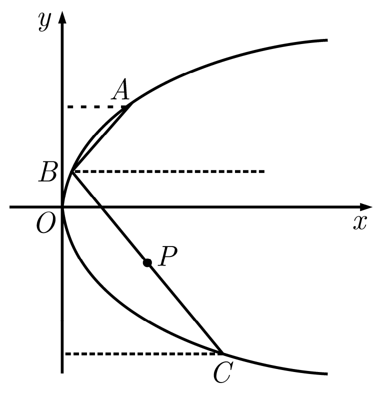
Докажи дека низата $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ зададена со $z_n=y_n-x_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$ е геометриска прогресија.

Решение. Од дефиницијата на z_n имаме $z_{n+1}=y_{n+1}-x_{n+1}$, односно

$$z_{n+1}=\frac{2x_n+3y_n}{5}-\frac{3x_n+y_n}{4}=-\frac{7}{20}x_n+\frac{7}{20}y_n.$$

Значи, $z_{n+1}=\frac{7}{20}(y_n-x_n)$. Имајќи во предвид дека $z_n=y_n-x_n$, добиваме дека $z_{n+1}=\frac{7}{20}z_n$, од каде $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{7}{20}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е геометриска прогресија со количник $\frac{7}{20}$.

2АБ. (Сигма 110, зад. 346, стр. 39) Дадена е парабола $y^2=2px, p>0$. На параболата се дадени точки *A*,*B*,*C* (*A* има најголема, а *C* најмала ордината) такви што симетралата на $\measuredangle ABC$ е паралелна со *x* - оската. Ако должината на проекцијата на отсечката *AC* на *y* - оската е еднаква на 4*p*, определи ја ординатата на средината на отсечката *BC*.



Решение. Нека $(\frac{y_A^2}{2p}, y_A), (\frac{y_B^2}{2p}, y_B), (\frac{y_C^2}{2p}, y_C),$ се координатите на точките *A*, *B*, *C*, соодветно. Бидејќи правите *AB* и *BC* зафаќаат суплементни агли со *x* - оската, следува дека нивните коефициенти на правци се спротивни. Од условот $k_{AB} = -k_{BC}$ имаме

$$\frac{y_A - y_B}{\frac{y_A^2}{2p} - \frac{y_B^2}{2p}} = \frac{y_B - y_C}{\frac{y_B^2}{2p} - \frac{y_C^2}{2p}}$$

односно

$$\frac{y_A - y_B}{y_A^2 - y_B^2} = \frac{y_B - y_C}{y_B^2 - y_C^2}.$$

Оттука добиваме $y_A + 2y_B + y_C = 0.$ Бидејќи $y_A > y_C$, а должината на проекцијата на отсечката *AC* на *y* - оската е еднаква на 4*p*, добиваме $y_A - y_C = 4p.$ Од последните две равенства следува $2y_B + 2y_C = -4p,$ што значи дека ординатата на средината *P* на отсечката *BC* е $\frac{y_B + y_C}{2} = -p.$

3АБ. (Сигма 111, зад. 358, стр. 48) Нека *a* и *b* се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед, се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a = b$.

Решение. Нека $x = \log_b a, y = \log_{2b}(2a)$ и $z = \log_{4b}(4a)$. Тогаш

$$b^x = a, (2b)^y = 2a \text{ и } (4b)^z = 4a.$$

Од условот на задачата следува $2y = x + z,$ па затоа

$$4a^2 = (2b)^{2y} = (2b)^{x+z} = 2^{x+z} b^x b^z = 2^{x+z} a \frac{4a}{4^z} = 2^{x-z} 4a^2$$

Според тоа, $2^{x-z} = 1,$ односно $x = z$. Сега следува $(4b)^x = (4b)^z = 4a = 4b^x,$ па затоа $4^x b^x = 4b^x,$ од каде добиваме $4^x = 4,$ или $x = 1$. Конечно, , што требаше и да се покаже.

4А. Пресметај го збирот $2\binom{2007}{2} + 4\binom{2007}{4} + ... + 2006\binom{2007}{2006}.$

Решение. Да забележиме дека

$$k\binom{2007}{k}=k\,\frac{2007\,!}{k\,!(2007-k)\,!}=\frac{2007\cdot 2006\,!}{(k-1)\,!(2007-k)\,!}=2007\binom{2006}{k-1}.$$

Уште знаеме дека

$$\binom{2006}{1}+\binom{2006}{3}+...+\binom{2006}{2005}=2^{2006-1},$$

па затоа

$$2\binom{2007}{2}+4\binom{2007}{4}+...+2006\binom{2007}{2006}=2007\cdot 2^{2005}.$$

1Б. Во рамнина се дадени две множества од паралелни прави $p_1,p_2,...,p_{13}$ и $q_1,q_2,...,q_7$ такви што правите од првото се сечат со правите од второто множество. Колку паралелограми се определени со дадените прави?

Решение. Секој пар прави од првото множество и секој пар прави од второто множество одредуваат точно еден паралелограм и обратно. Еден пар од првото множество може да се избере на $\binom{13}{2}$ начини, а пар прави од другото множество на $\binom{7}{2}$ начини, од каде следува дека постојат вкупно $\binom{13}{2}\cdot\binom{7}{2}=1638$ паралелограми.

4Б. Докажи дека за секој природен број *n*, $\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots++\sqrt{2}}}}_{n-\text{корени}}$.

Решение. Тврдењето ќе го покажеме користејќи го принципот на математичка индукција. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за природниот број n. Останува да се покаже точноста на тврдењето за $n+1$.

Навистина,

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots++\sqrt{2}}}}_{n-\text{корени}}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{4}}=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1-\text{корени}}.$$