ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019 26.01.2019

I година

1А. Докажи дека за секое x , x^2+x+1 е делител на x^8+x^4+1 .

Решение 1. Полиномот x^8+x^4+1 можеме да го запишеме во облик

x^8+x^4+1 =

$$=x^8+2x^4+1-x^4=(x^4+1)^2-(x^2)^2=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=$$

$$=(x^4+2x^2+1)(x^4-x^2+1)=$$

$$=((x^2+1)^2-x^2)(x^4-x^2+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

Според тоа

$$\frac{x^8+x^4+1}{x^2+x+1}=\frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)}{x^2+x+1}=(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

Решение 2. Задачата може да се реши и со делење на полиноми.

1Б. Одреди ги сите троцифрени природни броеви кои се 12 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е бараниот троцифрен број. Тогаш од условот на задачата добиваме дека

$$100a+10b+c= 12\left(a+b+c\right)=12a+12b+12c\,,$$

од каде $88a-11c=2b$. Бидејќи левата страна е делива со 11, следува дека мора да биде и десната, а тоа е можно само кога $b=0$ (b е цифра). Тогаш $11\left(8a-c\right)=0$, од каде следува дека $c=8a, a=1$. Според тоа бараниот број е 108.

2А и 3Б. (Збирка задачи И. Јанев, зад. 126, стр. 54) Производот од четири последователни броеви зголемен за 1 е полн квадрат. Докажи!

Решение. Да ги означиме броевите $n, n+1, n+2, n+3$. Тогаш:

$$n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)+1=$$

$$(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1=(n^2+3n+1)^2\ .$$

2Б. Ако бројот на страните на конвексен многуаголник се зголеми за 5, тогаш бројот на дијагоналите се зголемува за 100. Колку страни има тој многуаголник?

Решение. Нека бројот на страни на многуаголникот е n. Тогаш, бројот на дијагонали во многуаголникот е $\frac{n(n-3)}{2}$. Од условот на задачата добиваме :

$\frac{n(n-3)}{2}+100=\frac{(n+5)(n+2)}{2}$ од каде што $n=19$. Многуаголникот има 19 страни.

3А. Ако $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$, тогаш докажи дека $xy+yz+zx=0$.

Решение. Нека k=$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Тогаш $x=ka,\ y=kb,\ z=kc$ и

$$xa+yz+zx=ka\cdot kb+kb\cdot kc+kc\cdot ka=k^2(ab+bc+ca).$$

Од $a+b+c=1$ и $a^2+b^2+c^2=1$ добиваме

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right]=0,$$

односно $xy+yz+zx=0$.

4АБ. (Сигма 110, стр. 42, зад. 1466) За природните броеви a,b,c,d важи

$$a+b=c,\ a+d=2c.$$

Докажи, дека постои правоаголен триаголник со плоштина abcd и чии должини на страни се изразени со природни броеви.

Решение. Имаме $a=c-b, d=2c-a=b+c$. Според тоа,

$$abcd=\left(c-b\right)\cdot b\cdot c\cdot(b+c)=bc(c^2-b^2)=\frac{1}{2}(2bc)(c^2-b^2).$$

Бидијќи b и c се природни броеви и $c>b$ (a е природен број) добиваме дека $c^2-b^2>0$. Според тоа, $abcd$ е плоштина на правоаголен триаголник со катети со должини $2bc$ и c^2-b^2. Должината на хипотенузата е еднаква на

$$\sqrt{(2bc)^2+(c^2-b^2)^2}=\sqrt{c^4+2b^2c^2+c^4}=\sqrt{(b^2+c^2)^2}=b^2+c^2$$

Јасно, бидејќи b и c се природни броеви и c>b , добиваме дека должините на сите три страни $2bc$, c^2-b^2, c^2+b^2 се природни броеви.

II година

1АБ. (Збирка задачи И. Јанев, зад. 126, стр. 54) Реши го системот равенки

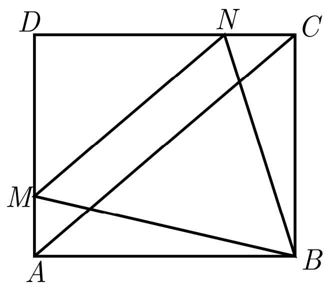
$$\begin{cases} \frac{5y+4x}{xy}=7 \\ \frac{7y-3x}{2xy}=\frac{11}{4} \end{cases}.$$

Решение. Го трансформираме системот во $\begin{cases} \frac{5y}{xy}+\frac{4x}{xy}=7 \\ \frac{7y}{2xy}-\frac{3x}{2xy}=\frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=7 \\ \frac{7}{2x}-\frac{3}{2y}=\frac{11}{4} \end{cases}$

Потоа, ставаме смена $\frac{1}{z}=u, \frac{1}{y}=v$. Добиваме

$$\begin{cases} 5u+4v=7 \\ \frac{7}{2}u-\frac{3}{2}v=\frac{11}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u+4v=7 \\ 14u-6v=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15u+12v=21 \\ 28u-12v=22 \end{cases}$$

Добиваме $u=1,\ v=\frac{1}{2}$, од каде што $x=1, y=2$.



2А. Нека даден е квадрат $ABCD$ и нека M и N се точки од страните AD и DC, соодветно такви што $\triangle BMN$ е рамностран. докажи дека $AC \parallel MN$.

Решение. Триаголниците $\triangle ABM$ и $\triangle BNC$ се складни (имаат еднакви хипотенузи и еднакви катети), па затоа $\measuredangle AMB = \measuredangle CNB$. Значи

$$\measuredangle DMN = 180^\circ - (\measuredangle AMB + \measuredangle BMN) =$$
$$= 180^\circ - (\measuredangle CNB + \measuredangle BNM) = \measuredangle DAC$$

Според тоа, $AC \parallel MN$

2Б. Упрости го изразот $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}$

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8})} =$$

Решение. $= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})+\sqrt{2}(\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{4})} =$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4)(1+\sqrt{2})}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

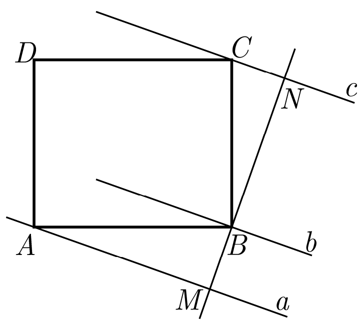
3А. Пресметај го збирот на квадратите на решенијата на равенката

$$(x^2-5x)^2-7(x^2-5x)+7=0.$$

Решение. Со смената x^2-5x **,** равенката ја сведуваме на $y^2-7y+7=0$, чиишто решенија се $y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-28}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{21}}{2}$. Тогаш, решенијата на равенките $x^2-5x-\frac{7+\sqrt{21}}{2}=0$ и $x^2-5x-\frac{7-\sqrt{21}}{2}=0$ са решенија и на дадената равенка. Според Виетовите врски, за збирот на квадратите на решенијата x_1,x_2 на равенката $x^2+px+q=0$ важи: $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-p)^2-2q$. Затоа за збирот на квадратите на решенијата x_1,x_2,x_3,x_4 на дадената равенка имаме:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=5^2-2\frac{-7-\sqrt{21}}{2}+5^2-2\frac{-7+\sqrt{21}}{2}=$$
$$=25+7+\sqrt{21}+25+7-\sqrt{21}=64$$

3В. Во темињата A, B и C на квадратот $ABCD$ повлркуваме три паралелни прави a, b и c, соодветно, така што b е меѓу a и c. Нека растојанието меѓу a и b е $5cm$, а меѓу b и c е $7cm$. Пресметај ја плоштината на квадратот.



Решение. Од темето B ги повлекуваме нормалите кон правите a и c. Нека нормалата кон a ја сече a во точката M , а нормалата кон c ја сече c во точката N. Тогаш правоаголните триаголници AMB и BNC се складни, т.е. нивните катети имаат должини $5cm$ и $7cm$. Затоа, страната на квадратот има должина $\sqrt{5^2+7^2}=\sqrt{74}cm$, односно плоштината на квадратот изнесува 74 cm^2 .

4АБ. (Сигма 111, стр. 46, зад. 354) Нека a,b и c се комплексни броеви такви што:

$$a+b+c=0, ab+bc+ca=0.$$

Докажи дека $|a|=|b|=|c|$.

Решение. Од првото равенство добиваме $a+b=-c$, па затоа со смена во второто равенство наоѓаме

$$0=ab+bc+ca=ab+c\left(a+b\right)=ab-\ c^2 \text{, т.е. } ab=\ c^2,$$

Аналогно добиваме $bc=a^2$ и $ca=\ b^2$. Од добиените равенства следува

$$|a|\cdot|b|=|c|^2, |b|\cdot|c|=|a|^2, |c|\cdot|a|=|b|^2.$$

Ако ги поделиме првите две равенки добиваме $\frac{|a|}{|c|}=\frac{|c|^2}{|a|^2}$ т.е. $|a|^3=|c|^3$, па затоа $|a|=|c|$. Аналогно се добива и $|b|=|c|$ па затоа и важи $|a|=|b|=|c|$.

III година

1А и 3Б. (Збирка задачи И. Јанев, зад. 276 а), стр. 39) Реши ја равенката:

$$\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=\log_5 0,2.$$

Решение. Бидејќи $\log_5 0,2=\log_5\frac{1}{5}=-1$, ќе имаме $\log_3\left(3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}\right)=-1$, од каде следува $3^{x^2-13x+28}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$ или $3^{x^2-13x+28}=\frac{1}{9}$. Последната експоненцијална равенка го добива обликот $3^{x^2-13x+28}=3^{-2}$, од каде ја добиваме квадратната равенка $x^2-13x+30=0$, чии корени се 3 и 10.

1Б. Реши ја равенката $4^x+9^x=2\cdot 6^x$.

Решение. Бидејќи $4^x=2^{2x}=(2^x)^2$, $9^x=3^{2x}=(3^x)^2$ и $6^x=2^x\cdot 3^x$, дадената равенка може да се трансформира во обликот $(2^x)^2-2\cdot 2^x\cdot 3^x+(3^x)^2=0$, односно $(2^x-3^x)^2=0$, од каде добиваме $2^x-3^x=0$, т.е. $2^x=3^x$. Последното равенство важи само за $x=0$. Значи решение на дадената равенка е $x=0$.

2АБ. (Сигма 111, стр. 46, зад. 355) За аглите $\alpha,\ \beta$ и γ на $\triangle ABC$ важи $\cos\gamma=2\sin\alpha\sin\beta-1$. Докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Бидејќи $\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)$ добиваме $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$. Според тоа, за $\triangle ABC$ важи:

$$\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta=1$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta=1$$
$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=1$$
$$\cos(\alpha-\beta)=1.$$

Последното равенство е исполнето ако и само ако $\alpha-\beta=360^\circ\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$. Бидејќи α и β се агли на триаголник мора да важи $k=0$, т.е. $\alpha=\beta$. Според тоа, $\triangle ABC$ е рамнокрак.

3А. За која вредност на параметарот *m*, збирот од квадратите на корените на квадратната равенка $x^2+(m+2)x+m^2+1=0$ има најголема вредност. Најди го тој збир.

Решение. Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=-(m+2)$ и $x_1x_2=m^2+1$, па за збирот од квадратите на корените на дадената квадратна равенка важи:

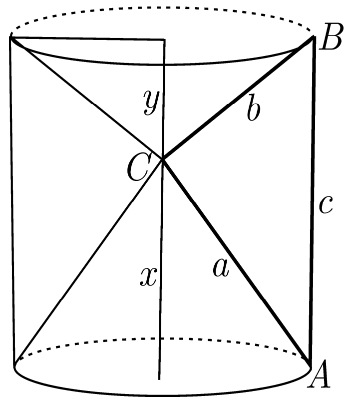
$$\alpha=-\frac{b}{2a}=2,$$

Темето на параболата $y=-m^2+4m+2$ е $T(\alpha,\beta)$, каде што $\alpha=-\frac{b}{2a}=2,$

$\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}=6$, т.е. $T(2,6)$ и во него параболата достигнува максимум бидејќи $a=-1<0$. Значи бараната вредност за *m* е 2, а бараниот збир е 6, т.е. $x_1^2+x_2^2=-m^2+4m+2=6.$

4А. Правоаголен триаголник со катети 20cm и 15cm ротира околу права која минува низ темето на правиот агол и е паралелна со хипотенузата. Пресметај го волуменот на вака добиеното ротационо тело.

Решение. Телото кое се добива со ротација на правоаголниот триаголник ABC е телото што се добива кога од цилиндарот ќе се одземат двата конуси (како на цртежот). Според ознаките на цртежот, од Питагоровата теорема за $\triangle ABC$ имаме $c^2=a^2+b^2=20^2+15^2=625$, од каде $c=25\text{cm}.$ Од тоа што $x+y=c=25$ следува $y=25-x$. Повторно од Питагоровата теорема за правоаголните триаголници кај двата конуси (едниот со радиус на основата *R* и висина *x*, а другиот со радиус на основата *R* и висина *y*) имаме



$$\begin{cases} R^2+y^2=15^2 \\ R^2+x^2=20^2 \end{cases}.$$

Од овде, имаме $15^2-y^2=20^2-x^2$. Заменувајќи $y=25-x$ во последната равенка добиваме $225-(25-x)^2=400-x^2$, т.е. $50x=800$ од каде $x=16\text{cm}.$ Според тоа, $y=25-x=9\text{cm},$ а $R=\sqrt{15^2-y^2}=12\text{cm}$. Конечно волуменот *V* на добиеното ротационо тело е

$$V = V_{ц} - V_{к_1} - V_{к_2} = 2400\pi\text{cm}^3,$$

каде што $(p-1)(q-1)(r-1) = 2^5$ е волуменот на цилиндарот, а волумените на конусите се:

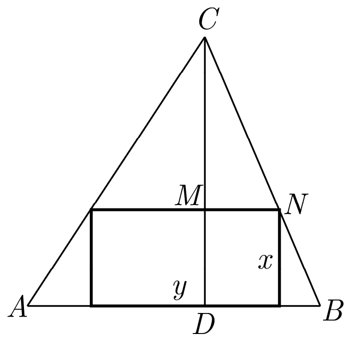
$$V_{к_1} = \frac{R^2\pi x}{3} = \frac{144 \cdot 16\pi}{3} = 768\pi\text{cm}^3 \text{ и } V_{к_2} = \frac{R^2\pi y}{3} = \frac{144 \cdot 9\pi}{3} = 432\pi\text{cm}^3.$$

4Б. Во триаголник со основа 16cm и висина 10cm впиши правоаголник со максимална плоштина, ако една страна на правоаголникот лежи на основата. Определи ги должините на страните на вака добиениот правоаголник.

Решение. Нека страните на бараниот правоаголник ги означиме со *x* и *y*. Од сличноста на триаголниците *DBC* и *MNC* имаме

$$8:10 = \frac{y}{2}:(10-x) \text{ од каде } 5y = 80-8x \text{, т.е. } y = 16 - \frac{8}{5}x.$$

Плоштината на правоаголникот е $P = xy$. Ако замениме $y = 16 - \frac{8}{5}x$ добиваме



$$P(x) = x\left(16 - \frac{8}{5}x\right) = -\frac{8}{5}x^2 + 16x.$$

Максимумот ($a = -\frac{8}{5} < 0$) на оваа квадратна функција $P(x)$ се достигнува во темето

$T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, т.е. $T(5,40)$. Според тоа, страните на бараниот правоаголник се

$x = 5$ cm и $y = 16 - \frac{8}{5}x = 8\text{cm}.$

IV година

1АБ. (Збирка задачи И. Јанев, зад. 98, стр. 33) Ако *a*, *b* и *c* образуваат аритметичка прогресија (во тој редослед), тогаш $abc\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 2b^2 + ac$. Докажи!

Решение. Ако *a*, *b* и *c* образуваат аритметичка прогресија, тогаш $b - a = c - b$, т.е. $2b = a + c$. Според тоа, имаме

$$abc\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=abc\left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right)=b(c+a)+ca=2b^2+ac.$$

2А. Најди полином со најмал можен степен и со рационални коефициенти така што $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ е негова нула.

Решение. Јасно е дека во разложувањето на полиномот на множители мора да го има членот $x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$. Бидејќи полиномот треба да има рационални коефициенти, $x-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}$ го множиме со $x-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ и добиваме $x^2-7-\sqrt{2}(2x+6)$. Бидејќи добиениот полином сеуште има ирационални коефициенти, го множиме со $x^2-7+\sqrt{2}(2x+6)$ и конечно го добиваме полиномот

$$P(x)=x^4-14x^2+49-8x^2-48x-72=x^4-22x^2-48x-23$$

кој ги задоволува условите на задачата.

2Б. Графикот на полиномната функција $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ има пет различни пресеци со *x*-оската, при што еден од нив е во точката (0,0). Кој од коефициентите не може да биде 0? Одговорот да се образложи!

Решение. Прво решение. Бидејќи $P(0)=e=0$, полиномната функција може да се запише во облик $P(x)=x(x^4+ax^3+bx^2+cx+d)$. Според тоа, функцијата $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ има четири различни нули, и ниту една не е 0. Затоа, $d\neq 0$.

Второ решение. Полиномната функција може да се запише како $P(x)=(x-r)(x-s)(x-t)(x-u)(x-v)$, каде што *r*, *s*, *t*, *u* и *v* се различни нули на полиномот $P(x)$. Тогаш, $d=rstu+rstv+rsuv+stuv$. Без губење од општоста претпоставуваме дека $r=0$ и s,t,u,v се различни од 0. Тогаш $d=stuv\neq 0$.

3АБ. (Сигма 112, стр. 45, зад. 372) Нека *a*, *b* и *c* се должините на страните на триаголник со плоштина *P*. Докажи дека $P<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$.

Решение. Нека α е аголот на разгледуваниот триаголник наспроти страната со должина *a*. Од формулата $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ следува $P\leq\frac{1}{2}bc$, т.е. $2P\leq bc$. Аналогно, $2P\leq ca$ и $2P\leq ab$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме $6P\leq ab+bc+ca$. Понатаму, равенството $P=\frac{1}{2}bc$ е исполнето само ако аголот α е прав, па затоа не е можно истовремено да важи $P=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}ca=\frac{1}{2}ab$. Значи,

$$6P<ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2,\text{ т.е. } P<\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

4А. Нека е дадена низата $(a_n)_n$ со $a_n=\sqrt{n(n+1)}$. Со S_n го означуваме збирот на првите *n* членови. Докажи дека $\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

Решение. Да забележиме дека $a_n=\sqrt{n(n+1)}>\sqrt{n\cdot n}=n$. Според тоа,

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n>1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Дополнително, важи

$$a_n=\sqrt{n(n+1)}=\sqrt{n^2+n}<\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}=n+\frac{1}{2}.$$

Па, имаме

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\ldots+\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{n(n+2)}{2}=$$

$$=\frac{n^2+2n}{2}<\frac{n^2+2n+1}{2}=\frac{(n+1)^2}{2}.$$

Значи, $\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{(n+1)^2}{2}$.

4Б. Определи ги сите прости броеви *p*, *q* и *r* кои ја задоволуваат равенката

$$pqr-pq-pr-qr+p+q+r-33=0.$$

Решение. Ја трансформираме равенката $pqr-pq-pr-qr+p+q+r-33=0$ и добиваме $(p-1)(q-1)(r-1)=2^5$. Без губење од општоста можеме да претпоставиме дека $p\le q\le r$. Единствени делители на 2^5 се: 1, 2, $2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5$. Со директна проверка се добива дека можни се само случаите кога $p-1=1,\ q-1=2,\ r-1=2^4$ и кога $p-1=2,\ q-1=2^2,\ r-1=2^2$. Според тоа, $(p,q,r)=(2,3,17)$ и $(p,q,r)=(3,5,5)$ и сите нивни пермутации се броеви кои ги задоволуваат условите на задачата.