РУБРИКА ЗАДАЧИ

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата, отчукани во MS Word или читко напишани на рака, испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Рубрика Задачи". Доколку користите MS Word, ве молиме решенијата испратете ги во еден word документ (doc или docx формат). Ако решенијата ги пишувате на рака, скенирајте ги или сликајте ги, и испратете ги во еден документ во pdf формат. Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 20 јануари 2020.** Најдобрите решенија ќе бидат објавувани во наредниот број на Сигма, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1531. Реши го системот равенки во множеството на природни броеви.

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2-\left(y-z\right)^2 \\ y+\dfrac{1}{z}=2-\left(x-y\right)^2 \\ z+\dfrac{1}{x}=2-\left(z-x\right)^2 \end{cases}$$

1532. Зоки му понудил на Јован да напише k различни двоцифрени броеви. Која е најмалата вредност на k за која Зоки секогаш може да избере два броја напишани од Јован така што нивната разлика да биде двоцифрен број запишан со исти цифри?

1533. Реши ја равенката во множеството на реални броеви

$$\sqrt{\sin x-\sqrt{\sin x+\cos x}}=\cos x$$

1534. Докажи дека $\sqrt{x^3-1}+\sqrt{y^3-1}=0$ ако

$$\left(x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-1}\right)\cdot\left(y\sqrt{y}+\sqrt{y^3-1}\right)=1$$

1535. Докажи дека еден од корените на равенката $ax^3+bx^2+cx+d=0$ е $-\dfrac{b}{3a}$ ако корените се членови на една аритметичка прогресија.

1536. Одреди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$f(4xy)=2y\cdot\left[f(x+y)+f(x-y)\right]$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ и $f(2019)=2020$.

1537. Најди ги сите релани броеви $x,\ y,\ z$ за кои $x^2-4y+7=0$, $y^2-6z+14=0$ и $z^2-2x-7=0$.

1538. Во множеството на реалните броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}.$$

1539. На страните AB и BC на ΔABC надворешно се конструирани квадратите $ABMN$ и $BCPQ$. Докажи дека центрите на тие квадрати и средините на отсечките MQ и AC образуваат квадрат.

1540. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ избрана е точка P таква што $\angle DPA+\angle BPC=180^\circ$. Докажи дека $\angle PDC=\angle CBP$.

1541. Во сенатот има 30 сенатори. Секој од сенаторите се скарал со точно шест други сенатори. На колку начини може да биде формирана трочлена комисија од сенатори така да било кои два члена од комисијата се скарани или пак било кои два члена од комисијата не се скарани?

1542. Низата (a_n) има прв член $a_1=1$ и е дефинирана со $a_n=a_{n-1}+\sqrt{a_{n-1}{}^2+1}$ за секое $n\geq 2$. Докажи дека низата $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ е конвергентна низа.

1543. Ако еден петоцифрен број се подели со 10 се добива остаток 3. Ако се подели со 15 се добива остаток 8, а ако се подели со 84 се добива остаток 5. Кој е најмалиот петоцифрен број?

1544. Докажи дека равенката $x^2+y^3=z^4$ нема решение во множеството на простите природни броеви, а во множеството на целите броеви има бесконечно многу решенија. Наведи две од решенијата.

1545. Докажи дека за било кои три ненулти реални броеви е точно следново неравенство:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{42}{5}\geq\frac{19}{5}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

Во кој случај важи равенството?

Подготвиле:
Јилмаз Деликташ
Раде Кренков
Слаѓан Станковиќ