ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата, отчукани во MS Word или читко напишани на рака, испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Задачи од Училницата". Доколку користите MS Word, ве молиме решенијата испратете ги во еден word документ (doc или docx формат). Ако решенијата ги пишувате на рака, скенирајте ги или сликајте ги, и испратете ги во еден документ во pdf формат. Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 20 јануари 2020.** Најдобрите решенија ќе бидат објавувани во наредниот број на Сигма, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

Прва година

1. Ортогоналната проекција на рамностраниот триаголник ΔABC врз некоја рамнина е триаголникот $\Delta A'B'C'$. Ако $\overline{AA'}=10\ cm$, $\overline{BB'}=15\ cm$ и $\overline{CC'}=17\ cm$, одреди го растојанието $\overline{TT'}$ од тежиштето на триаголникот ΔABC до рамнината.

2. Дали постои цел број x таков што броевите $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се истовремено цели броеви?

3. Докажи дека за секои реални броеви x и y важи неравенството

$$x^2+5y^2+1\geq 4xy+2y.$$

4. Пресметај ја разликата на изразите $1^2+2^2+3^2+...+2020^2$ и $1\cdot 3+2\cdot 4+...+2019\cdot 2021$.

Втора година

1. Ако коефициентите на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се цели броеви, тогаш и нејзините корени се цели броеви. Докажи.

2. На страната AB на рамностраниот триаголник ΔABC избрана е точка M. Низ точката M повлечени се прави паралелни со страните BC и AC и така се добиени точките $P\in BC$ и $Q\in AC$. Одреди ја положбата на точката M, така што отсечката $\overline{PQ}$ да биде со најмала должина.

3. Нека за квадратниот трином $f(x)=ax^2+bx+c$ важи

$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=0$ или $f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right)=0$. Докажи дека $f(1)\cdot f(-1)=0$.

4. Корените на квадратната равенка $x^2+ax+b+1=0$ се природни броеви. Докажи дека a^2+b^2 е сложен број.

Трета година

1. Нека $a<b<c$, $a+c=2b$ и $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, каде $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$ се должините на страните, а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница на ΔABC. Одреди ја големината на аголот во темето B.

2. Да се пресмета $\sin^2 2\alpha$ ако важи $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}=7.$

3. Реши ја тригонометриската равенка $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$

4. Реши ја равенката $6\log_{27}(-\sin 4x)-2\log_3(2\sin^2 2x-1)=1$, на интервалот $\left[0,2\pi\right)$.

Четврта година

1. Докажи дека

$$1+x+x^2+.....+x^{80}=(x^{54}+x^{27}+1)(x^{18}+x^9+1)(x^6+x^3+1)(x^2+x+1).$$

2. Ако решенијата на равенката $ax^3+bx^2+cx+d=0$ образуваат аритметичка прогресија, тогаш едно од решенијата на таа равенка е $-\frac{b}{3a}$.

3. Докажи дека $\frac{1}{2021}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}<\sqrt{\frac{1}{2021}}$.

4. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи $f(1)=1$ и $f(x+y)=3y\cdot f(x)+2x\cdot f(y)$ за било кои реални броеви x и y.

Подготвиле:
Анета Гацовска-Барандовска
Emin Durmishi
Јасмина Маркоска
Зоран Штерјов