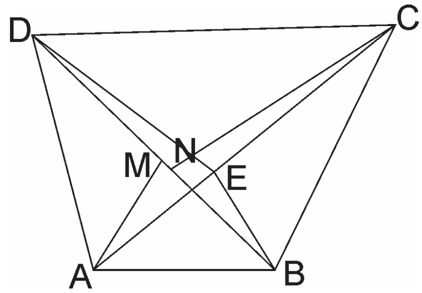
РЕШЕНИЈА

1. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ во кој симетралите на внатрешните $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ имаат заедничка точка на дијагоналата AC. Докажете дека симетралите на внатрешните $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ имаат заедничка точка на дијагоналата BD.



Решение: Нека E е заедничката точка на симетралите на $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle ADC$ со дијагоналата AC, и нека M и N се пресеците на симетралите на $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$, соодветно, со дијагоналата BD.
Од теоремата за симетрала на агол (применета за BE и DE) добиваме:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}\Rightarrow\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}$$ **(2 поени)**

Од истата теорема (применета за AM и CN) добиваме:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{DN}}\Rightarrow\frac{\overline{BM}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{ND}}$$ **(2 поени)**

Ако додадеме 1 кон двете страни на последното равенство добиваме:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MD}}+1=\frac{\overline{BN}}{\overline{ND}}+1\Rightarrow\frac{\overline{BM}+\overline{MD}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{BN}+\overline{ND}}{\overline{ND}}\Rightarrow\frac{\overline{BD}}{\overline{MD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{ND}}\Rightarrow\overline{MD}=\overline{ND}$$ **(2 поени)**

Следствено, точките M и N се совпаѓаат; таа е посакуваната заедничка точка. **(1 поен)**

2. Во секое 1×1 квадратче од $m\times n$ табла е запишан по еден позитивен цел број. Дозволени се следниве трансформации:
   (1) Во произволно избрана редица од таблата сите броеви да се намалат за 1.
   (2) Во произволно избрана колона од таблата сите броеви да се удвојат.

   Дали е секогаш возможно, после конечен број чекори, сите броеви запишани на таблата да се еднакви на -1? (Одговорот да се образложи.)

Решение: Одговорот е потврден. Имено, ќе покажеме како, во конечен број чекори, може да се постигне сите броеви запишани во првата редица да се еднакви на 0, а притоа преостанатите броеви на таблата да се позитивни. **(1 поен)**

Постапка

Нека G и M, соодветно, се најголемиот и најмалиот број во првата редица.

- Сé додека $G-M>0$, оваа разлика може да се направи помала. Навистина, најпрво

$M-1$ пати последователно ја применуваме трансформацијата (1) врз првата редица, а потоа ја применуваме по еднаш трансформацијата (2) врз секоја колона кај која во првата редица (моментално) стои бројот 1. Така, новодобиената вредност на $G-M$ е за 1 помала од старата. **(3 поени)**

- Доколку сите броеви во првата редица се меѓусебно еднакви, тогаш M пати (со моменталната вредност на M) последователно ја применуваме трансформацијата (1) врз првата редица. **(1 поен)** □

Ја повторуваме опишаната постапка врз секоја од преостанатите редици. **(1 поен)**
На крајот, останува да ја примениме уште по еднаш трансформацијата (1) врз секоја редица од таблата. **(1 поен)**

3. За дадени цели броеви $n > 0$ и $k > 1$, нека $F_{n,k}(x,y) = x! + n^k + n + 1 - y^k$. Покажете дека само за конечно многу парови (a,b) од позитивни цели броеви важи $F_{n,k}(a,b) = 0$.

Решение: Нека $A = n^k + n + 1$. Да забележиме дека постои прост делител p на A, таков што степенот t на p во канонската факторизација на A не е делив со k. Навистина, ако претпоставиме дека таков прост делител не постои, тогаш A мора да е k-ти степен на природен број. Последното не е можно бидејќи $n^k < A < (n+1)^k$. **(3 поени)**

Нека $F_{n,k}(a,b) = 0$. Ќе покажеме дека $a < (t+1)p$. Имено, ако $a \geq (t+1)p$, тогаш од $p^{t+1} \mid a!$ и $p^t \mid A$, следува $p^t \mid b^k$. Но, ова повлекува дека $p^{\left\lceil \frac{t}{k} \right\rceil} \mid b$, па така $p^{k\left\lceil \frac{t}{k} \right\rceil} \mid b^k$. Од друга страна, $k\left\lceil \frac{t}{k} \right\rceil \geq t+1$ (бидејќи $k \nmid t$), и оттука $p^{t+1} \mid A$. Добиениот заклучок противречи на претпоставката дека t е степенот на p во канонската факторизација на A. **(3 поени)**

Преостанува да искористиме дека равенството $a! + n^k + n + 1 - b^k = 0$ е еквивалентно со $b = \sqrt[k]{a! + n^k + n + 1}$. Следствено, за фиксни a, n и k, постои најмногу еден природен b за кој $F_{n,k}(a,b) = 0$. **(1 поен)**

Значи, за дадени цели броеви $n > 0$ и $k > 1$, равенката $F_{n,k}(a,b) = 0$ има само конечно многу природни решенија.